TRANSFERTS THERMIQUES ; LOI DE FOURIER.

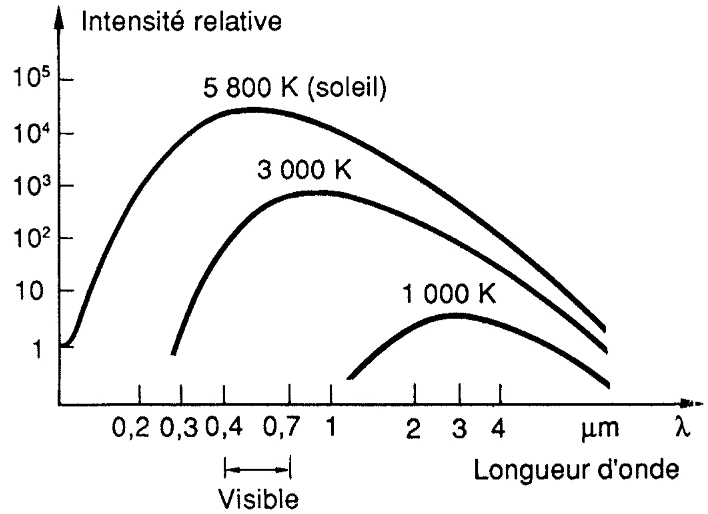
I. Les différents modes de transferts thermiques.

1°) Transfert par rayonnement; loi de Stefan (Programme MP / MP*).

⇒ C'est le seul mode à pouvoir se propager dans le **vide**.

⇒ Trouve son origine dans **le mouvement des charges électriques** présentes dans la matière.

⇒ Le spectre émis est **continu** et d'autant plus décalé vers les fréquences élevées (c'est-à-dire les grandes énergies) que la température est plus grande.



Spectre du rayonnement thermique (corps noir). Les deux axes sont en échelle logarithmique.

⇒ La longueur d'onde (λ_m) du maximum d'énergie rayonnée dépend de la température T suivant la **loi dite du déplacement de Wien** : $\boxed{\lambda_m T \approx 3\, mm.K}$.

⇒ L'étude du rayonnement a conduit le physicien allemand Max Planck au concept de **quantum d'énergie** pour interpréter le spectre émis par un **corps noir** (objet physique défini comme un absorbeur intégral sur la totalité du spectre électromagnétique). Le rayonnement émis par un corps noir en équilibre thermodynamique et radiatif ne dépend que de sa température T et en rien de sa nature (des atomes qui le constituent).

⇒ Dès 1879, le physicien autrichien Stefan proposait une loi expérimentale reliant la puissance surfacique totale (sur toutes les longueurs d'onde du spectre) émise par un corps noir en équilibre thermodynamique et radiatif dans un demi espace (angle solide de 2π) en fonction de la seule température du corps noir. Cette loi trouva sa justification théorique par la suite, à la lumière des travaux de Planck. On retient la **loi de Stefan:**

$$\boxed{P = \sigma T^4 \left(P \text{ en } W/m^2\right)} \text{ avec } \sigma = 5.7\ 10^{-8} \text{ usi. (ou } P = \left(\frac{T}{64{,}7}\right)^4 W/m^2 \text{)}$$

2°) Transfert par convection; loi de Newton.

⇒ Ce mode suppose la présence d'un **milieu matériel**.

⇒ Il se fait **avec transfert de matière** dans un fluide initialement (ou maintenu) hors équilibre.

⇒ Dans de nombreux cas, au transfert de chaleur convectif s'ajoute un transfert conductif (voir 3°) au niveau de la paroi de la canalisation dans laquelle s'écoule le fluide: on parle alors de **couplage conducto-convectif**. Le flux thermique surfacique, noté j_{cc} (c'est-à-dire la chaleur transférée par unité de temps et par unité de surface) peut dans de nombreux cas être décrit par la **loi dite de Newton** :

$\boxed{j_{cc} = h\left(T_{paroi} - T_{fluide}\right)}$, où h est un coefficient empirique appelé coefficient de transfert convectif. L'unité SI de h est $W.m^{-2}.K^{-1}$.

Le flux thermique est dirigé dans le sens des T ↘.

Type de transfert	fluide	h ($W.m^{-2}.K^{-1}$).
Convection naturelle	gaz	5 - 30
	eau	100 - 1000
Convection forcée	gaz	10 - 300
	eau	300 - 12 000
	huile	50 - 1700

3°) Transfert par conduction; loi de Fourier.

⇒ Le transfert par conduction nécessite la présence d'un **milieu matériel**.

⇒ Contrairement à la convection, **la conduction se fait sans mouvement macroscopique de matière**: c'est donc le mode de transfert d'énergie prépondérant dans les solides.

La conduction correspond à un mode de transfert d'énergie interne. Elle se produit dans un milieu hors équilibre. Le maintien de ce déséquilibre, ou le retour à l'équilibre se traduit par un flux thermique (ou flux de chaleur) émis des régions chaudes vers les régions froides.

⇒ Au flux thermique Φ_Σ (**chaleur transférée par unité de temps à travers une surface Σ**), on associe un vecteur noté $\vec{j}_{th}$ appelé **vecteur densité de flux (ou de courant) thermique** (ici d'origine conductif), dont la norme représente le **flux thermique surfacique**, en $W.m^{-2}$.

La **Puissance thermique** transférée par conduction s'écrit : $\boxed{\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS}}$.

- **Loi de Fourier:**

La **loi de Fourier** se traduit par la relation: $\boxed{\vec{j}_{th} = -\lambda.\overrightarrow{grad}\,T}$.

λ (**λ toujours positif**) est la **conductivité thermique** du matériau. L'unité SI de λ est le $\mathbf{W.m^{-1}.K^{-1}}$. λ dépend du matériau et (un peu) de la température.

Le **signe moins** dans la loi de Fourier traduit l'orientation de $\vec{j}_{th}$ vers les basses températures.

⇒ Ce transfert de chaleur caractérise une évolution intrinsèquement **irréversible.** Rappelons-nous l'énoncé historique de Clausius du 2nd principe: "***la chaleur ne passe pas naturellement des régions froides vers les régions chaudes***".

- *Quelques valeurs typiques de λ (en $W.m^{-1}.K^{-1}$):*

argent	418	verre	~ 1	Bois	0,12 à 0,25
cuivre	390	béton	0,9 à 1,75	huile minérale	0,13
aluminium	238	brique	0,84	laine de verre	0,04
laiton	120	eau(à 20 °C)	0,6	mousse de polyuréthane	0,03
fer	82	corps humain	0,5	polystyrène expansé	0,04
plomb	35	plâtre	0,46	Air	24.10^{-3}
acier inox	16	ciment, liège	0,3	Argon	18.10^{-3}

II. L'équation de diffusion (ou équation de conduction).

1°) Expression la plus générale de l'équation de diffusion.

Soit un solide homogène et isotrope de **masse volumique ρ** et de **capacité calorifique massique c**, hors équilibre (dont la température n'est pas uniforme), à l'intérieur duquel peuvent exister des sources internes d'énergie (géothermie, radioactivité, source de chaleur, …) qu'on caractérise par leur **puissance volumique p_{th}**.

Soit $\vec{j_{th}}$ le vecteur densité de courant thermique dans le matériau.

Établissons à l'aide du premier principe un bilan énergétique pendant une durée dt sur un volume V du solide, de masse $M = \iiint_V \rho d\tau$.

On peut avec profit passer par la fonction enthalpie, l'évolution subie par le solide se faisant à pression extérieure constante (pression atmosphérique). Dès lors la variation d'enthalpie s'identifie avec la chaleur reçue par le solide.

Ainsi : $dH = H(t+dt) - H(t) = \frac{\partial H}{\partial t} dt$, avec $H = mc_P T$ à une constante additive près.

$$\text{Soit : } dH = \frac{\partial}{\partial t}\left[\iiint_V \rho c_P T d\tau\right] dt = \left[\iiint_V \left(\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t}\right) d\tau\right] dt .$$

La chaleur reçue par ce volume V limité par la surface fermée Σ pendant la durée dt provient d'une part du flux conductif à travers la surface fermée Σ, et d'autre part d'une éventuelle source interne de chaleur, modélisée par sa puissance volumique produite :

$$\text{Ainsi : } \delta Q^{reçue} = \left(\oiint_\Sigma \vec{j}_{th}.d\vec{S}_{\text{int}} + \iiint_V p_{th} d\tau\right) dt = -\left(\oiint_\Sigma \vec{j}_{th}.d\vec{S}_{ext} + \iiint_V p_{th} d\tau\right) dt .$$

On transforme l'intégrale double en une intégrale triple par la formule de Green –Ostrogradsky :

$\oiint_\Sigma \vec{j}_{th}.d\vec{S}_{ext} = \iiint_V div\left(\vec{j}_{th}\right) d\tau$. Ainsi : $\delta Q^{reçue} = \left[\iiint_V \left(-div\left(\vec{j}_{th}\right) + p_{th}\right) d\tau\right] dt$

Le premier principe ($dH = \delta Q^{reçue}$), conduit à l'équation aux dérivées partielles appelée équation de conduction (on dit aussi diffusion) dont l'expression la plus générale est : $\boxed{\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} = p_{th} - div\left(\vec{j}_{th}\right)}$.

2°) Diffusion sans sources internes: l'équation de Fourier.

- En l'absence de sources internes $(p_{th} = 0)$, en supposant que le milieu suit la loi de Fourier et si l'on considère λ indépendant de la température, on aboutit à l'équation dite "de la chaleur" ou "**équation de Fourier**": $\boxed{\rho.c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda.\Delta T}$.

- On pose $\boxed{a = \frac{\lambda}{\rho.c}}$, coefficient appelé "**diffusivité thermique**", dont l'unité SI est le **m²/s**.

On retient **l'équation de Fourier** sous la forme: $\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a.\Delta T}$.

- **Diffusivités thermiques de quelques matériaux:**

Cuivre	$114\ 10^{-6}$	acier inox	$4\ 10^{-6}$	sol	$6\ 10^{-7}$
Aluminium	$86\ 10^{-6}$	Verre	$0{,}58\ 10^{-6}$	eau à 25 °C	$1{,}4\ 10^{-7}$
Laiton	$33\ 10^{-6}$	Bois	$0{,}45\ 10^{-6}$	corps humain	$\sim 1\ 10^{-7}$

- **Analyse qualitative de l'équation de Fourier.**

1. Remarquez les **rôles dissemblables** joués par les variables spatiales et temporelle.

> En particulier, l'inversion du temps (changer t en -t) ne laisse pas l'équation invariante: cela traduit l'irréversibilité physique du phénomène de conduction thermique ce qui permet de définir une "flèche du temps".

2. **L'équation de Fourier est linéaire.** Ainsi:

> Toute combinaison linéaire de fonctions solutions de l'équation de Fourier est aussi solution. On peut aussi chercher à résoudre l'équation dans ∀ et prendre pour solution la partie réelle de la solution complexe trouvée.

Remarque: La résolution de l'équation de Fourier est assez complexe en général et peu de configurations se prêtent à une résolution numérique. Si on se limite à un problème à une dimension (T fonction de x et du temps t), et suivant les conditions aux limites imposées, il existe certains types de solutions particulières:

- $T(x,t) = f(x).g(t)$ (méthode de séparation des variables, pour étudier la réponse forcée à une excitation sinusoïdale par exemple).
- $T(x,t) = \frac{A}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)$ (Étude de la diffusion d'un pic de température).
- $T(x,t) = A\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}}\exp(-u^2)du$ (pour le problème de la température de contact en régime dynamique).

3. **Analyse dimensionnelle.**

Revenons sur la dimension du coefficient de diffusivité: a en m^2/s. Soit ainsi ℓ et τ une longueur et une durée caractéristique du phénomène de conduction.

On peut écrire: $a = \dfrac{\partial T}{\partial t} \Big/ \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \dfrac{\ell^2}{\tau}$. Cette relation entre ℓ et τ montre que la diffusion s'étire en longueur dans le temps à mesure qu'on s'éloigne du centre originaire de la diffusion.

Donc, si pour une barre de longueur L_0, il faut attendre une durée T_0 pour obtenir à peu près le régime permanent, il faudra attendre 4 fois plus longtemps avec une barre de longueur $2L_0$.

3°) Cas d'un écoulement unidirectionnel, sans termes de production interne.

a) En l'absence de pertes latérales.

On néglige toutes pertes latérales, par rayonnement ou convection. Il n'y a pas de sources internes, donc $p_{th} = 0$.

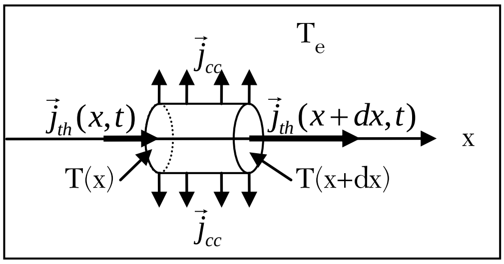
On suppose que la diffusion se fait suivant un axe Ox. L'équation de Fourier s'écrit dans ce cas : $\boxed{\rho.c\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$.

b) Avec prise en compte de pertes latérales (principe des ailettes de refroidissement) :

On suppose maintenant que la surface latérale du conducteur cylindrique (rayon R) n'est pas isolée du milieu extérieur à la température T_e : les échanges thermiques sont régis par la loi de Newton (flux conducto-convectif) : $dP' = h.(T(x) - T_e).dS_{lat}$, où dP' est la puissance thermique échangée par la surface latérale élémentaire ($dS_{lat} = 2\pi R.dx$).

(L'échange conducto-convectif est une grandeur algébrique et comptée ici positivement si le flux de chaleur est dirigé vers l'extérieur, compté donc comme une perte).

On effectue un bilan énergétique au cylindre élémentaire compris entre les abscisses x et x + dx pendant la durée dt :



La variation de l'énergie du tronçon s'écrit : $\delta^2 E = \delta E(t+dt) - \delta E(t) = \frac{\partial}{\partial t}(\delta E)\, dt$.

L'évolution se faisant à pression constante et le système étant macroscopiquement au repos, cette énergie est sous forme enthalpique.

On peut écrire : $\delta E = (dm) c_P T$, avec $dm = \rho \pi R^2 dx$. Ainsi : $\boxed{\delta^2 E = \rho c_P \pi R^2 \frac{\partial T}{\partial t} dtdx}$.

Exprimons maintenant les transferts thermiques entrants et sortants du tronçon pendant la durée dt : chaleur entrante par conduction à l'abscisse *x* entre *t* et *t+dt* : $j_{th}(x,t)\pi R^2 dt$.

chaleur sortante par conduction à l'abscisse *x+dx* entre *t* et *t+dt* : $j_{th}(x+dx,t)\pi R^2 dt$.

chaleur sortant par flux conducto-convectif sur la surface latérale du tronçon entre *t* et *t+dt* : $h\left[T(x) - T_{ext}\right] 2\pi R dx dt$.

Le bilan s'écrit alors : $\delta^2 E = j_{th}(x,t)\pi R^2 dt - j_{th}(x+dx,t)\pi R^2 dt - h\left[T(x) - T_{ext}\right] 2\pi R dxdt$, soit :

$$\begin{aligned}\delta^2 E &= -j_{th}(x,t)\pi R^2 dt - j_{th}(x+dx,t)\pi R^2 dt - h\left[T(x) - T_{ext}\right] 2\pi R dxdt \\ &= -\pi R^2 \frac{\partial j_{th}}{\partial x} dxdt - 2\pi R h\left[T(x) - T_{ext}\right] dxdt\end{aligned}$$

En écrivant que le milieu suit la loi de Fourier, on a : $j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$.

Par simplification par le produit $\pi R^2 dtdx$, on en déduit l'équation d'évolution :

$$\boxed{\rho . c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda . \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{R}\left(T(x) - T_e\right)}.$$

En supposant qu'un régime stationnaire est établi, le profil de température T(x) vérifie l'équation différentielle : $\lambda . \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h}{R}\left(T(x) - T_e\right) = 0$, soit encore en posant $\tau(x) = T(x) - T_e$:

$\boxed{\frac{d^2 \tau}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R}\tau(x) = 0}$. Soit $\boxed{d^2 = \frac{\lambda R}{2h}}$ (d est homogène à une longueur).

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit : $\boxed{\tau(x) = A \exp\left(-\frac{x}{d}\right) + B \exp\left(\frac{x}{d}\right)}$, les constantes A et B dépendant des conditions aux limites du problème étudié…

III. Résolution de l'équation de diffusion thermique.

1°) Réponse en régime stationnaire, sans termes de production.

> En régime stationnaire et sans sources internes dans le matériau, le champ de température est solution de l'équation de Laplace: $\boxed{\Delta T = 0}$. On a aussi $\boxed{div\, \overrightarrow{j_{th}} = 0}$.
> Le flux thermique à travers toute surface fermée est nul.

a) Cas d'un problème unidirectionnel : T(x). Le laplacien s'écrit : $\boxed{\Delta T = \frac{d^2 T}{dx^2}}$

La solution de l'équation de Laplace est du type : $\boxed{T(x) = Ax + B}$. On a $\boxed{\vec{j}_{th} = -\lambda A \vec{e}_x = \overrightarrow{cste}}$

b) Cas d'un problème à symétrie cylindrique : T(r). Le laplacien s'écrit : $\boxed{\Delta T = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)}$

La solution de l'équation de Laplace est du type : $\boxed{T(r) = A\ln(r) + B}$ On a : $\boxed{\vec{j}_{th} = -\lambda\frac{A}{r}\vec{e}_r}$.

c) Cas d'un problème à symétrie sphérique : T(r). Le laplacien s'écrit : $\boxed{\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)}$

La solution de l'équation de Laplace est du type : $\boxed{T(r) = \frac{A}{r} + B}$ On a : $\boxed{\vec{j}_{th} = \lambda\frac{A}{r^2}\vec{e}_r}$

2°) Analogie électrique : Notion de résistance thermique:

Soit Φ_{th} le flux de conduction thermique à travers une surface S d'un matériau de conductivité thermique λ. La loi de Fourier et la conduction thermique présentent le même formalisme que la loi d'Ohm et la conduction électrique associée.

Précisons ces analogies:

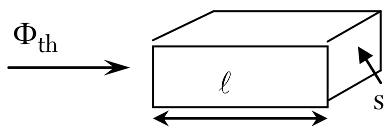
Loi d'Ohm : conduction électrique		Loi de Fourier : conduction thermique.
$\boxed{\vec{j} = \gamma\vec{E} = -\gamma\,\overrightarrow{grad}\,V}$: ***Loi d'Ohm locale***	⇔	$\boxed{\vec{j}_{th} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,T}$
Potentiel électrique V	⇔	Température T
$\boxed{I = \iint_S \vec{j}.d\vec{S}}$ (flux de $\vec{j}$ à travers S)	⇔	$\boxed{\Phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th}.d\vec{S}}$ (flux de $\vec{j}_{th}$ à travers S)
Conductivité électrique : γ (en $\Omega^{-1}.m^{-1}$) conducteur métallique : 10^7 à 10^8 usi semi-conducteur : 10^{-4} à 10^2 usi isolant électrique : 10^{-6} usi	⇔	*Conductivité thermique* : λ (en $W.m^{-1}.K^{-1}$) bon conducteur métallique : 10^2 usi bois, eau, verre, acier : 10^{-1} à 10 usi bon isolant thermique : 10^{-2} usi
Résistance électrique : $R = \frac{V_1 - V_2}{I}$ ou conductance électrique : $G = \frac{I}{V_1 - V_2}$	⇔	Résistance thermique : $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th}}$ ou conductance thermique : $G_{th} = \frac{\Phi_{th}}{T_1 - T_2}$

☞ On retient la définition générale de la **résistance thermique** : $\boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th}}}$ (♥).

> Les analogies établies ci-dessus, montrent que les lois d'associations des résistances thermiques sont les mêmes que celles des résistances électriques.

➢ Cas d'une **propagation unidimensionnelle** à travers un matériau de longueur ℓ et de section s

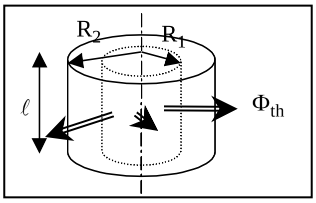
$\boxed{R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{\ell}{s}}$ ou $\boxed{G_{th} = \lambda\frac{s}{\ell}}$



- Cas d'une **propagation radiale à travers un cylindre** (problème à symétrie cylindrique).

Le flux conductif est radial, ne dépendant que de la distance r à l'axe Oz, s'écoulant entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$).

Pour un tronçon de longueur ℓ, on établit que : $\boxed{R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda\ell}\ln\left(R_2/R_1\right)}$.



3°) Approximation des régimes quasi-stationnaires.

On établit en régime stationnaire, la loi fondamentale de l'électrocinétique :

Loi des nœuds : fondée sur la propriété $div(\vec{j}) = 0$ du vecteur densité de courant électrique, valable en régime stationnaire, qui conduit au résultat suivant :

> La somme des courants I_k divergeant à partir d'un nœud N est nulle : $\boxed{\sum_k I_k = 0}$.

L'approximation des régimes quasi-stationnaires :

☞ On montre que la loi des nœuds reste encore valable en régime « lentement variable » : c'est l'approximation des régimes quasi-stationnaires ou A.R.Q.S.

Cette approximation est transposable au problème de la conduction thermique. Plus précisément, **cela suppose que le système a le temps d'adapter le profil de température réel au profil de température en régime stationnaire**.

> L'A.R.Q.S. sera applicable en diffusion thermique si la durée caractéristique d'évolution τ de la température est grand devant la durée caractéristique du régime transitoire, (ici celui d'un phénomène diffusif), soit $\boxed{\tau >> \frac{L^2}{a}}$, où a est la diffusivité thermique du milieu.