Université Paul Verlaine-Metz - UFR MIM - 2010/2011
Master de Mathématiques
Cours MATLAB

MATLAB 8

Equations aux dérivées partielles

J-P. Croisille

1- Equation de transport (1)
1) On considère le problème suivant: chercher une fonction $(x,t) \mapsto u(x,t)$ solution de l'équation de transport:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t + u_x = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \tag{1}$$

Un tel problème s'appelle un problème de Cauchy. Vérifier que la fonction $u(x,t) = u_0(x-t)$ est solution de (1).
2) On considère la donnée initiale $u_0(x) = \sin(x)$. Editer et executer le programme suivant:

```
clear all; % MEMOIRE VIDEE
a=0;b=10; % INTERVALLE [A,B]
n=100;dx=(b-a)/n; % NOMBRE DE POINTS , PAS D'ESPACE
x=a:dx:b; % GRILLE POUR LE TRACE
c=1; % VITESSE
u0='sin'; % FONCTION INITIALE
itemax=1000; % NOMBRE MAXIMUM D'ITERATIONS
t=0; % TEMPS INITIAL
dt=(b-a)/(abs(c)*n); % PAS DE TEMPS
axis([a,b,-.5,1.5]); % AXES
for ite=1:itemax, % BOUCLE EN TEMPS
  t=t+dt; % INCREMENT DU PAS DE TEMPS
   str=[u0,'((x-c*t))']; % CHAINE DE CARACTERES POUR LE PARAMETRAGE
   u=eval(str);    % EVALUATION DE LA CHAINE DE CARACTERES
   plot(x,u,'-b'); % TRACE DE LA SOLUTION AU TEMPS T
   title(['Temps=',num2str(t),'   ','vitesse=',num2str(c)]);% TITRE
   drawnow; pause(0.02);% TRACE DE LA SOLUTION AU TEMPS T
end
```

. Décrire ce que fait ce programme.
3) Remplacer la condition initiale $u_0(x) = \sin(x)$ par la fonction $u_0(x) = \cos^2(x)$, puis par la fonction $u_0(x) = [x(1-x)]_+(x)$ où y_+ désigne la partie positive de y. On appellera la fonction matlab `fonction.m`.

2- Equation de transport (2)
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + t u_x = 0 \quad & x \in \mathbb{R} \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

1) Vérifier que $u(x,t) = u_0(x - t^2/2)$ est solution.
2) Ecrire un programme qui réalise l'animation de cette solution sur le modèle précédent. On essaiera comme précédemment $u_0(x) = \sin(x)$. Quelle est la différence de comportement entre les solutions de (1) et de (2).

3- Equation de la chaleur
On considère le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \quad & x \in \mathbb{R} \quad t \geq t_0 > 0 \\ u(x,t_0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3}$$

1) On considère la fonction

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-\frac{(x-x_0)^2}{4t}) \tag{4}$$

Vérifier que (4) satisfait l'équation de la chaleur pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. Quelle est la condition initiale au temps $t = t_0 > 0$ correspondant à (4) ?
2) Sur le modèle précédent, écrire un programme qui effectue l'animation de la solution (4).
3) Que représente le paramètre x_0 ?
4) Peut-on choisir $t_0 = 0$? Pourquoi ?