41. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR PAR SÉPARATION DES VARIABLES

(∇^2) est l'opérateur Laplacien scalaire

41.1. Introduction

L'équation de la chaleur est la seconde équation en importance dans les connaissances d'un ingénieur:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad avec \quad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}}$$

K est la conductivité thermique, σ la chaleur spécifique et ρ est la densité volumique du corps. Notez la façon d'écrire ci-dessus du Laplacien scalaire dans le système de coordonnées cartésiennes.

Si on suppose qu'on travaille avec une poutre infiniment plus longue qu'épaisse, on veut négliger la propagation radiale de la chaleur, ou encore, si on s'intéresse à un fil dont la section est constante et de densité volumique homogène, situé selon l'axe x, et après passage en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Il s'agit de l'équation de la chaleur selon une seule dimension. N'oubliez que $u(x,t)$ est la température du corps en un point donné de l'axe x à un instant donné t. Si nous avons les conditions aux frontières suivantes (lorsque que les deux extrémités sont plongés à une température de zéro degrés):

$$\boxed{\begin{cases} u(0,t) = 0, & \forall t \\ u(L,t) = 0, & \forall t \end{cases}}$$

et l'unique condition initiale :

$$\boxed{u(x,0) = f(x)}$$

Nous avons tout un ensemble (équation d'onde + conditions) pour trouver une solution particulière. Pour cela, nous adoptons de nouveau la stratégie suivante :

1) Faire en sorte de simplifier l'expression de la forme solution en l'exprimant comme étant le produit de deux fonctions indépendantes $u(x,t) = v(x).w(t)$.

2) Déterminer une solution $v(x)$ qui satisfasse les conditions aux frontières.

3) Déterminer la forme solution $w(t)$ en conséquence des imposés sur $v(x)$.

4) Exprimer la solution $u(x,t)$ sous forme de série de Fourier pour qu'elle satisfasse à présent à la condition initiale sur t .

41.2. Fonction à variables séparées :

Encore une fois, afin de simplifier la recherche de la forme solution, nous posons la solution comme étant le produit de deux fonctions à variables séparées :

$$u(x,t) = v(x).w(t)$$

dès lors, les dérivées partielles première et seconde respectives sont :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.w(t) = v''.w$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v(x)\frac{\partial w}{\partial t} = v.w'$$

Et en pratiquant la séparation des variables :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Leftrightarrow \quad v.w' = c^2 v''.w \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v''}{v} = \frac{1}{c^2}\frac{w'}{w}$$

Comme il s'agit de deux variables x et t qui sont indépendantes, les expressions dans chaque membre de droite et de gauche ne peuvent être en tout temps égales que si elles sont égales à une constante arbitraire k :

$$\frac{v''}{v} = \frac{1}{c^2}\frac{w'}{w} = k.$$

Ce qui nous permet de séparer en deux équations :

$$\boxed{\begin{cases} v'' - k.v = 0 \\ w' - kc^2.w = 0 \end{cases}}$$

Cela nous ramène à la résolution de deux équations différentielles ordinaires, une du premier ordre, et une du second ordre.

41.3. Satisfaire les conditions aux limites :

L'équation du second ordre en $v(x)$:

$$v'' - k.v = 0$$

a pour forme solution :

$$\begin{aligned} v(x) &= ax + b, && \text{si } k = 0. \\ v(x) &= C_1 e^{+\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}, && \text{si } k > 0. \\ v(x) &= A\cos\sqrt{k}x + B\sin\sqrt{k}x, && \text{si } k < 0. \end{aligned}$$

Or l'introduction des conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(0,t) = v(0)w(t) = 0, & \forall t \\ u(L,t) = v(L)w(t) = 0, & \forall t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases}$$

nous démontre que les deux premières formes ne peuvent exister, puisque :

$$\left.\begin{array}{rl} v(0) = a0 + b \;\Rightarrow\; b = 0 \\ \text{puis} \quad v(L) = aL + 0 = 0 \;\Rightarrow\; a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v(x) \equiv 0, \quad \forall x.$$

et :

$$\left.\begin{array}{rl} v(0) = C_1 e^{+\sqrt{k}.0} + C_2 e^{-\sqrt{k}.0} = 0 \;\Rightarrow\; C_1 + C_2 = 0 \\ \text{puis} \quad v(L) = C_1 e^{+\sqrt{k}.L} - C_1 e^{-\sqrt{k}.L} = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0, \quad \forall x.$$

Il ne nous reste alors que la troisième possibilité, lorsque $k < 0$:

$$v(0) = A\cos\sqrt{k}.0 + B\sin\sqrt{k}.0 = 0 \;\Rightarrow\; \{A = 0$$

$$\text{puis} \quad v(L) = 0.\cos\sqrt{k}.L + B.\sin\sqrt{k}.L = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} B = 0 \\ ou \quad \sin\sqrt{k}.L = 0 \end{cases}$$

Nous devons choisir $B \neq 0$, si nous ne voulons pas avoir une solution triviale. De sorte que nous devons avoir, pour ce qu'on appelle le nombre d'onde p :

$$\sin\sqrt{k}.L = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{k}.L = n\pi \;\Rightarrow\; \sqrt{k} = \frac{n\pi}{L}.$$

d'où l'expression de la solution pour $v(x)$:

$$\boxed{v_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.}$$

Le coefficient B est omis ici, mais réapparaîtra plus tard, intégré dans la solution de $w(t)$.

Il y a donc toute une famille de fonctions solutions qui satisfont les conditions (aux limites) sur x.

41.4. Conséquence sur la fonction temporelle

En résolvant l'équation d'ordre 1 pour trouver $w(t)$:

$$w' - kc^2.w = 0.$$

Qui se retrouve être, à cause de la contrainte : $k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 < 0$ sur la solution $v(x)$:

$$w' + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 w = 0$$

La solution générale de cette équation est, selon le nombre n :

$$\boxed{w_n(t) = C_n e^{-\int_0^t \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 d\tilde{t}} + 0}$$

En conséquence nous avons une famille de formes solutions $u_n(x,t)$:

$$u_n(x,t) = v_n(x) \times w_n(t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Et la solution générale $u_g(x,t)$ sera évidemment la combinaison linéaire de toutes ces formes solutions. C'est donc une série trigonométrique qui représente la solution générale à cette équation aux dérivées partielles homogène :

$$\boxed{u_g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}}$$

41.5. Solution particulière de l'équation de la chaleur

Il s'agit à présent de fixer les coefficients C_n à l'aide de l'unique condition initiale : $u(x,0) = f(x)$.

$$u_p(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 .0} = f(x)$$

Les coefficients seront donc calculés selon les formules d'Euler pour les fonctions périodiques $p = 2L$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{L}x \quad \Rightarrow \quad C_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x) \sin\frac{n\pi}{L}x.dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx$$

$f(x)$ doit nécessairement avoir un prolongement impair fictif entre $-L < x < 0$ (d'après son expression en série trigonométrique), de sorte que $f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$ constitue une fonction paire. Et alors :

$$\boxed{C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx}$$

EXEMPLE : TEMPÉRATURE INITIALE EN TRIANGLE LE LONG DE LA POUTRELLE

Soit à trouver la température le long de la poutrelle à tout instant ultérieur lorsque la distribution originelle en température est triangulaire, et que les bouts sont maintenus à zéro degrés.

$$f(x) = \begin{cases} x, & si \quad 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ (L - x), & si \quad \dfrac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

SOLUTION :

La solution est telle que formulée pour une poutrelle de longueur L quelconque :

$$u_g(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

avec les coefficients comme suit :

$$C_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.dx=\frac{2}{L}\left(\int_0^{L/2} x.\sin\frac{n\pi}{L}x.dx+\int_{L/2}^{L}(L-x).\sin\frac{n\pi}{L}x.dx\right)$$

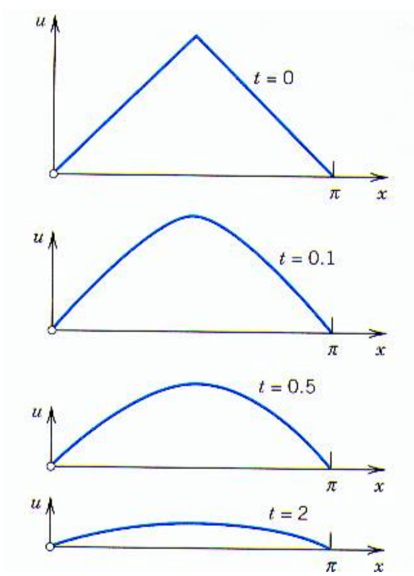
Ce calcul avait déjà été effectué par parties au chapitre 37, dont il suffit de remplacer $\frac{2h}{L}=1$. De sorte que :

$$C_n=\frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{4L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},\quad \text{avec } n \text{ impair}.$$

Et la forme extensive la solution particulière est :

$$\boxed{u_p(x,t)=\frac{4L}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi x}{L}\times e^{-\left(\frac{c\pi}{L}\right)^2 t}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{L}\times e^{-\left(\frac{3c\pi}{L}\right)^2 t}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{L}\times e^{-\left(\frac{5c\pi}{L}\right)^2 t}-\frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi x}{L}\times e^{-\left(\frac{7c\pi}{L}\right)^2 t}+...\right]}$$

Cette fois, il n'est pas facile d'utiliser une identité trigonométrique comme précédemment pour mettre en évidence la forme $f^*(x-ct)$ et $f^*(x+ct)$ prolongées impaires de $f(x)$. Voici toutefois la distribution de la température le long de la poutre à différents instants. En l'évaluant numériquement avec un ordinateur et au développement limité ci-dessus pour $u_p(x,t)$.



EXEMPLE : DISTRIBUTION INITIALE DE LA TEMPÉRATURE EN FORME DE SINUS

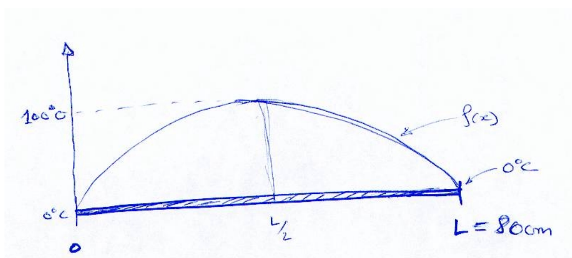
Soit à trouver la distribution de la température le long d'une poutrelle de cuivre long de $L = 80 \quad cm$, si la distribution initiale est $f(x) = u_p(x,0) = 100\sin\frac{\pi x}{80} \quad {}^oC$, et que les bouts (conditions aux frontières) sont maintenus à $0\ {}^oC$. Combien de temps a-il fallu pour que le point de température maximal tombe à $50\ {}^oC$.

Les données sur le cuivre sont :

- Conductivité thermique du cuivre : $K = 0,95 \quad cal/cm/\sec/{}^oC$.
- Chaleur spécifique du cuivre : $\sigma = 0,092 \quad cal/gm/{}^oC$.
- Densité volumique du cuivre : $\rho = 8,92 \quad gm/cm^3$.

SOLUTION :

D'abord un croquis sur la distribution initiale en température :



À partir des données, on peut calculer la constante de propagation :

$$c^2 = \frac{K}{\sigma\rho} = \frac{0,95}{0,092 \times 8,92} = 1,158 \quad \text{cm}^2/\text{sec} .$$

Et que :

$$\left(\frac{c\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1,158} \times 3,14}{80}\right)^2 = 0,001785 \quad \text{sec}^{-1}$$

Comme la condition initiale est telle que :

$$u_p(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 .0} = f(x) = 100\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right).$$

On en déduit par simple inspection que :

$$C_1 = 1 \quad et \quad C_n = 0, \quad \forall n = 2,3,4,...$$

et que l'expression particulière de la solution est :

$$\boxed{u_p(x,t) = 100\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\times e^{-0,001785t}}$$

le point de la tige où la température est maximale est en :

$$\frac{\pi x}{L} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{2}.$$

Et qu'alors :

$$\boxed{u_p(\frac{L}{2},t) = 100\times e^{-0,001785t}}$$

Le moment t_1 cette température sera redescendue à $50\ ^oC$ est :

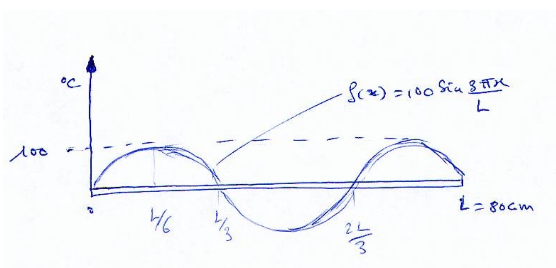
$$u_p(\frac{L}{2},t_1) = 100\times e^{-0,001785t_1} = 50\ ^oC \quad \Rightarrow \quad t_1 = \ln\left(\frac{50}{100}\right)/\left(-0,001785\right) = 388 \quad \text{sec}.$$

EXEMPLE : VITESSE DE DÉCROISSANCE DE LA TEMPÉRATURE

Soit à résoudre le même problème que l'exemple précédent, mais dont l'expression de la distribution initiale de température a été changée pour : $f(x) = u_p(x,0) = 100\sin\frac{3\pi x}{80}\quad {}^oC$. Les conditions aux limites sont inchangées.

SOLUTION :

D'abord un croquis de la distribution de la distribution initiale en température :



Cette fois–ci, le seul terme de la série de Fourier qui représente la distribution en température est :

$$u_p(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\times e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2.0} = f(x) = 100\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$$

le troisième terme, ce qui implique :

$$C_3 = 100 \quad et \quad C_n = 0, \quad \forall n = 1,2,4,5,6,...$$

Et la solution particulière est :

$$u_p(x,t) = 100 \sin \frac{3\pi x}{L} \times e^{-\left(\frac{3c\pi}{L}\right)^2 t}$$

Cette fois-ci le temps t_2 de décroissance de température à $50\ ^oC$ sera :

$$\boxed{u_p(\frac{L}{6}, t_2) = 100 \times e^{-0,01607 t_2} = 50\ ^oC \quad \Rightarrow \quad t_2 = \ln\left(\frac{50}{100}\right) / \left(-0,01607\right) \approx 43 \quad \text{sec}}.$$

Voir la suite dans le chapitre 42.

EXERCICES

QUESTIONS & PROBLÈMES

SOLUTIONNAIRE